Mødet den 24de April.

Hr. Prof. *Steen* gav en Meddelelse om

Integration af Differentialligningen

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + R\frac{dy}{dx} + S = 0$$

ved Faktorer alene indeholdende x og y.

Det er vel bekjendt, hvormeget Theorien af Differentialligningers Integration lader tilbage at ønske, især hvad Methodernes Almindelighed angaaer. Med Hensyn til Differentialligningerne af første Orden og første Grad imellem to Variable har man rigtignok i *Eulers* Theori om deres Integrabilitet ved en Faktor en virkelig almindelig Theori, hvoraf ogsaa saa godt som alle de bekjendte Integrationer af disse Ligninger lade sig aflede; men de praktiske Frugter af denne Theori ere saare faa, da Bestemmelsen af Faktoren sjeldent er mulig udenfor de Tilfælde, der ogsaa lade sig behandle efter andre Methoder. Gaaer man dernæst over til Differentialligninger, som vel ere af første Orden, men ikke af første Grad, eller til dem af højere Orden, saa møder man bestandig kun ringe Spor af Noget, der ligner en almindelig Theori. Dem af højere Orden har man vel delt i to store Grupper, de lineære og de ikke-lineære, og den første af disse er undersøgt baade grundig og med Held, saa at man er kommet i Besiddelse af flere Theoremer af almindelig Natur; men i alle andre Henseender falder Theorien om Differentialligningernes Integration ganske i Stykker, hvilket ogsaa nødvendiggjør en stærk Beskjærelse af Stoffet ved Undervisningen og noget sløver det udmærkede Redskab, som Mathematikken ellers afgiver for Naturvidenskaberne. Under saadanne Omstændigheder maa ethvert Bidrag til en Udvidelse af de integrable Differentialligningers Antal være af nogen Interesse og saaledes egnet til Meddelelse for Selskabet. Men dertil kommer for nærværende Meddelelses Vedkommende, at den slutter sig til den før nævnte eneste existerende almindelige Theori, den om den Eulerske Faktor, og baner Vejen for lignende fremtidige Meddelelser.

Intet er vistnok lettere end i Almindelighed at bevise ***Tilværelsen af endog uendelig mange Faktorer***, afhængige af de Variable x og y, samt den enes Differentialkoefficienter indtil $(n-1)^{te}$ Orden, naar Ligningen er af n^{te} Orden, Noget som først synes at være gjort af ***Lacroix*** (traité du calc. diff. & int. Paris 1814 t. II. art. 635, optaget i Ramus Diff. & Integralregn. II Del 2 Kap. 24). Men ***Bestemmelsen af disse Faktorer*** i dens hele Almindelighed er et langt vanskeligere Problem end selve den forelagte Lignings Integration. Ved Ligningerne af første Orden afhænger den saaledes af en partiel Differentialligning imellem tre Variable, som, behandlet efter de for disse Ligninger bekjendte Methoder, fører tilbage til den oprindelig forelagte Ligning, ***med mindre*** Faktorerne antage en saa speciel Form, at de afhænge af ***den ene Variable alene***; thi saa er Bestemmelsen let. Paa lignende Maade vil Bestemmelsen af Faktorer til de her omhandlede Ligninger af anden Orden blive altfor vanskelig, saalænge de indeholde foruden x og y ogsaa $\frac{dy}{dx}$; saasnart derimod $\frac{dy}{dx}$ ikke indgaaer i dem, saa faaes til deres Bestemmelse ***to samtidig gjældende partielle Differentialligninger, hvis Integration i mange Tilfælde er mulig. Euler*** har Intet meddelt i denne Retning; han har vel i inst. calc. integr. t. II. sect. I. cap. IV, efterat have charakteriseret de sædvanlige Integrationer ved Substitutioner, som lidet naturlige, talt om Muligheden af at finde Integrationsfaktorer, hvoraf han lover sig gode Resultater og som han anbefaler til Geometrernes Opmærksomhed, skjönt der maa rejse sig betydelige Vanskeligheder af den store Variation i Ligningernes og Faktorernes Form. Han har derfor kun forsøgt at finde Faktorer til Ligninger af anden Orden, som tilmed for største Delen vare lineære (jfr. novi commentarii Acad. Petrop. t. VII.), og derhos er det kun ligesom famlende at han finder Faktorer alene afhængige af de Variable selv for ganske specielle Former af Differentialligninger, og undertiden, efterat have forsøgt sig med forskjællige Former af Faktorer, ender han med at opgive at naae Maalet (jfr. Udtrykket: »hic *frustra tentantur* multiplicatores formæ etc.«). Det er *Lacroix*, som i sit ovennævnte Værk først har underkastet Spörgsmaalet om Integration af Differentialligninger af anden Orden ved Faktorer en rationel Behandling, idet han for Ligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + R\frac{dy}{dx} + S = 0$$

søger et første Integral af Formen

$$z\frac{dy}{dx} + N = 0,$$

hvor z er Faktoren. Han støtter sig til de Betingelser, der gjælde for Integrationen af de totale Differentialer af anden Orden imellem to Variable, og søger, naar de ikke *ere* tilfredsstillede, at opfylde dem ved Indførelse af en Faktor, alene indeholdende x og y, og dennes Bestemmelse afhænger da atter af en Integration af et totalt Differential af første Orden imellem to Variable. Det er en lignende Fremgangsmaade, her skal bruges, men med den Forskjæl, at de totale Differentialer erstattes ved Differentialligninger simplere end den forelagte, og det *i alle Tilfælde simplere.* Der vil saaledes foreligge vel kun et Brudstykke af en almindelig Theori, men selv en partiel Generalisation torde paa Integralregningens nærværende Standpunkt fortjene lidt Opmærksomhed, og er den hele Methode ifølge sit Væsen end ikke egnet til at tilvejebringe store Resultater, saa er den dog frugtbar nok til, idetmindste indtil videre, at udrives fra den Forglemmelse, hvoraf den synes at være truet. Og skulde endelig den rimelige stedse stigende Komplikation af Formlerne indskrænke Fremgangsmaaden til Ligninger af anden Orden, saa kunne dog Resultaterne være af nogen Vigtighed paa Grund af disse Ligningers hyppige Forekomst i Mechanikken.

Grundlaget for Methoden er ganske analogt med den for Bestemmelsen af den Eulerske Faktor til Ligninger af første Orden. Der anstilles en Sammenligning imellem den forelagte Differentialligning med Tilføjelse af en ubekjendt Faktor og den Differentialligning, som faaes ved Differentiation af det søgte første Integral under den supponerede Form

$$M\frac{dy}{dx} + N = C,$$

som er den eneste mulige, naar Faktoren skal afhænge af x og y alene. Derved findes de to Betingelsesligninger, som den søgte Faktor skal tilfredsstille, og de blive to samtidig gjældende partielle Differentialligninger, der altid lade sig ændre til to Differentialligninger imellem blot to Variable hver, af hvilke den ene er ligefrem integrabel og kommer til at indeholde en ubekjendt Funktion af x, som saa igjen maa bestemmes ved den anden, der stedse er *lineær af anden Orden.* Man kommer endog til det Hovedtheorem, at ***Integrationen af alle Differentialligninger af den anførte Form, forsaavidt der existerer nogen Integrationsfaktor for dem alene afhængig af x og y, maa afhænge af Bestemmelsen af et partikulært Integral af lineære Differentialligninger af anden Orden.*** Ved Siden deraf gjøres der en Række Anvendelser, hvorved der erholdes en Del vel specielle Differentialligninger, men dog omfattende hele Grupper af Ligninger, hvis Reduktion til Qvadratur er mulig. Ved Anvendelsen paa den *lineære* Differentialligning ($Q = 0$) faaes foruden andre bekjendte Resultater et nyt Bevis for, at disse Ligninger *med* en venstre Side forskjællig fra Nul afhænger af deres Integration, hvor venstre Side er Nul. Ved Behandling af den *homogene* Differentialligning opstaaer der ***fem fuldstændig integrable almindelige Former***, næmlig, efterat det i Almindelighed er vist, at Formen ***maa*** være

$$y\frac{d^2y}{dx_2} + a\frac{dy^2}{dx^2} + R\frac{dy}{dx} + Sy = 0,$$

integreres den fuldstændig i følgende Tilfælde:

a) hvor $a = -1$,

b) $S = 0$,

c) $(a + 1)\ S = \dfrac{dR}{dx}$,

d) naar R og S ere konstante,

e) naar $R = \dfrac{b}{A + Bx}$, $S = \dfrac{c}{(A + Bx)^2}$,

hvor dog d) er indbefattet i e), men i Overensstemmelse med den sædvanlige Fremstilling af de tilsvarende Tilfælde ved lineære Ligninger tages de hver for sig. Endelig bliver det for den forelagte *almindelige* Lignings Vedkommende vist, at dens Behandling væsentlig lettes i følgende Tilfælde:

a) naar Faktoren indeholder x alene,

b) naar den indeholder y alene og

c) naar $S = 0$.

---

1. Ved Differentiation af en Differentialligning af første Orden og første Grad af Formen

$$M\frac{dy}{dx} + N = C \tag{1}$$

kommer man til en Differentialligning af anden Orden, der almindelig uden foregaaende Reduktion faaer Formen

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + R\frac{dy}{dx} + S = 0. \tag{2}$$

Er omvendt en Ligning af Formen (2) given, kan man finde Betingelserne for, at den har et første Integral af Formen (1). Differentieres nemlig denne, faaes

$$M\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dM}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{dN}{dx} = 0, \tag{3}$$

der sammenlignet med (2) giver

$$M = P,\ \frac{dM}{dy} = Q,\ \frac{dM}{dx} + \frac{dN}{dy} = R,\ \frac{dN}{dx} = S.$$

Af den sidste Ligning udledes, idet $\psi(y)$ er en arbitrær Funktion af y,

$$N = \int Sdx + \psi(y),$$

og altsaa af de andre

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{dP}{dy} \\ R &= \frac{dP}{dx} + \frac{d \,.\int Sdx}{dy} + \psi'(y). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Tilfredsstille nu Koefficienterne i (2) Betingelserne (4), saa svarer der til (2) et første Integral af Formen (1), næmlig

$$P\frac{dy}{dx} + \int Sdx + \psi(y) = C. \tag{5}$$

Rigtigheden heraf prøves let ved Differentiation, saa at det deraf fremgaaer, at (4) ere de nødvendige og tilstrækkelige Betingelser for Integrationens Mulighed.

Man ser let af det Udviklede, hvorledes $\psi(y)$ bliver bestemt ved den anden (4), da P, Q, R, S ere bestemte opgivne Funktioner af x og y.

Ex. Ligningen

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + (x + f(y))\frac{dy}{dx} + y = Q,$$

hvor Q er en Funktion af x alene, vil kunne integreres paa denne Maade, idet den første (4) er ligefrem opfyldt og den anden, naar man sætter

$$\psi'(y) = f(y).$$

Som Følge deraf faaes det første Integral

$$y\frac{dy}{dx} + yx + \int f(y)\,dy = \int Qdx + c_1.$$

2. Tilfredsstille derimod Koefficienterne i (2) ikke (4), saa vil Ligning (2) ofte kunne gjøres integrabel ved en Faktor, indeholdende blot x og y. Til dennes Bestemmelse haves da ifølge (4)

$$\left.\begin{aligned} \varphi Q &= \frac{d \,.\, \varphi P}{dy} \\ \varphi R &= \frac{d \,.\, \varphi P}{dx} + \frac{d \,.\int \varphi Sdx}{dy} + \psi'(y), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

der ere to samtidig gjældende partielle Differentialligninger, hvori $\frac{d\varphi}{dx}$ og $\frac{d\varphi}{dy}$ indgaae tilligemed φ, x og y. Disse Ligningers Integration frembyder imidlertid dog mindre Vanskelighed end den forelagtes; thi den første omformet til

$$\frac{d\,.\,\varphi P}{dy} = \frac{Q}{P}\,.\,\varphi P$$

giver strax

$$\varphi = \frac{X}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dy}, \tag{7}$$

idet X er en ubekjendt Funktion af x alene. Denne Funktion maa dernæst kunne bestemmes ved at φ skal tilfredsstille den anden (6). Differentieret med Hensyn til x giver denne først

$$P\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(2\frac{dP}{dx} - R\right)\frac{d\varphi}{dx} + S\frac{d\varphi}{dy} + \left(\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dy}\right)\varphi = 0, \tag{8}$$

og dernæst ved Elimination af $\frac{d\varphi}{dy}$ ved den første (6)

$$P\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(2\frac{dP}{dx} - R\right)\frac{d\varphi}{dx} + \left(\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{S}{P}\frac{dP}{dy} - \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dy} + \frac{SQ}{P}\right)\varphi = 0, \tag{9}$$

som er lineær af anden Orden. Ved dennes Integration er y at betragte som konstant, saa at der kan indkomme arbitrære Funktioner af y. Vilde man indføre Udtrykket (7) for φ, fik man en ny lineær Differentialligning af anden Orden til Bestemmelse af X; men da y ikke skal indgaae heri, maa der kun fremkomme arbitrære Konstanter ved Integrationen, og det maa være ganske uden Indflydelse paa X, hvilke Værdier man vilde tillægge y; det kan derfor hænde, at man ved et passende Valg af specielle Værdier af y kan simplificere Ligningen og lette Integrationen.

Saasnart nu φ er bestemt, vil Integralet af (2) være

$$P\varphi\frac{dy}{dx} + \int S\varphi dx + \psi(y) = c_1. \tag{10}$$

Med Hensyn til Bestemmelse af $\psi(y)$, skal man i Analogi med det i 1. Udviklede finde den af den anden (6), og den kræver følgelig den forudgaaende Bestemmelse af φ, der tilmed sker fuldstændig ved (9), hvori $\psi(y)$ ikke forekommer.

Endvidere maa bemærkes, at der i φ ikke bør indgaae arbitrære Konstanter, hvorved (10) vilde komme til at indeholde flere end een arbitrær Konstant. Det er altsaa tilstrækkeligt at finde partikulære Integraler af den lineære Differentialligning af anden Orden, som giver φ eller X.

Saaledes er det bevist, at

Integrationen af enhver Differentialligning af Formen

$$P\frac{d^2y}{dx^2}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+R\frac{dy}{dx}+S=0, \tag{2}$$

som kan gjøres integrabel ved en Faktor blot indeholdende x og y, afhænger af Bestemmelsen af et partikulært Integral tilhørende en lineær Differentialligning af anden Orden.

3. Først anvendes Theorien paa *den lineære Differentialligning af anden Orden*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1\frac{dy}{dx}+P_2y=Q, \tag{11}$$

der almindelig kun tilfredsstiller den første (4). Da $P=1$, $Q=0$, bliver ifølge (7)

$$\varphi=X, \tag{12}$$

som indsat i (9) giver

$$\frac{d^2X}{dx^2}-P_1\frac{dX}{dx}+\left(P_2-\frac{dP_1}{dx}\right)X=0. \tag{13}$$

Integrationen af den lineære Differentialligning (11) med en Funktion af x paa højre Side afhænger altsaa af Beregningen af partikulære Integraler i en anden lineær Differentialligning (13) med højre Side lig Nul. Behandles igjen (13) paa samme Maade, støder man paa

$$\frac{d^2X'}{dx^2}+P_1\frac{dX'}{dx}+P_2X'=0, \tag{14}$$

som umiddelbart faaes af (11) ved at sætte $Q=0$, $y=X'$. De partikulære Integraler til (14) ere altsaa Faktorer i (13) og de til (13) Faktorer i (11). Vilde man atter søge Faktorer til (14), saa vilde disse blive de samme som til (11), næmlig de partikulære Integraler i (13). De to Ligninger (13) og (14) have altsaa gjensidig hinandens partikulære Integraler til Faktorer.

De to partikulære Integraler til (14) betegnede ved X'_1 og X'_2 ere altsaa Faktorer til (13) og tjene derfor til Bestemmelse af $\psi(y)$ ifølge den anden (6). Indføres X'_1 i (13), faaes

$$X'_1 \frac{d^2 X}{dx^2} - P_1 X'_1 \frac{dX}{dx} + \left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_1 X = 0;$$

altsaa ifølge den anden (6) haves

$$-P_1 X'_1 = \frac{dX'_1}{dx} + \frac{d\,.\int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_1 X dx}{dX} + \psi'(X)$$

eller

$$-P_1 X'_1 = \frac{dX'_1}{dx} + \int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_1 dx + \psi'(X).$$

Men da P_1, P_2 og X'_1 ere Funktioner af x alene, maa $\psi'(X) = 0$, og da desuden Ligningen differentieret med Hensyn til x giver (14), saa er Betingelsen opfyldt uden Funktion af X. Som Følge heraf vil (13) ved Integration give

$$X'_1 \frac{dX}{dx} + X\int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_1 dx = c_1. \tag{15}$$

Brugte man det andet partikulære Integral X'_2 i (14) som Faktor, fik man

$$X'_2 \frac{dX}{dx} + X\int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_2 dx = c_2, \tag{16}$$

og ved Elimination af $\frac{dX}{dx}$ imellem (15) og (16) frembringes den primitive Ligning svarende til (13)

$$X\left[X'_2 \int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_1 dx - X'_1 \int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_2 dx\right]$$
$$= c_1 X'_2 - c_2 X'_1, \tag{17}$$

eller X explicite udtrykt ved x saaledes

$$X = \frac{c_1 X'_2 - c_2 X'_1}{X'_2 \int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_1 dx - X'_1 \int\left(P_2 - \frac{dP_1}{dx}\right) X'_2 dx}. \tag{18}$$

Ganske paa samme Maade vilde vilde den til (14) svarende primitive Ligning erholdes, nemlig, idet X_1 og X_2 ere partikulære Integraler til (13),

$$X' = \frac{c_1 X_2 - c_2 X_1}{X_2 \int P_2 X_1 dx - X_1 \int P_2 X_2 dx}. \tag{19}$$

Endelig vil nu Integralet af (11) kunne fuldstændig fremstilles, idet Faktorerne X_1 og X_2, som ere partikulære Integraler i (13), forudsættes bekjendte. Man vil næmlig atter her finde den anden (6) tilfredsstillet, idet $\psi(y) = 0$, og de to første Integraler findes at være

$$\left.\begin{aligned} X_1 \frac{dy}{dx} + y \int P_2 X_1 dx &= \int Q X_1 dx + c_1 \\ X_2 \frac{dy}{dx} + y \int P_2 X_2 dx &= \int Q X_2 dx + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Elimination af $\frac{dy}{dx}$ giver den primitive Ligning.

$$y = \frac{c_1 X_2 - c_2 X_1 + X_2 \int Q X_1 dx - X_1 \int Q X_2 dx}{X_2 \int P_2 X_1 dx - X_1 \int P_2 X_2 dx}. \qquad (21)$$

Herved haves nye Beviser for bekjendte Sætninger om den lineære Differentialligning af anden Orden, deriblandt ogsaa for den Egenskab, hvortil ***Ramus*** er kommet ad en anden Vej 1842 (se Vidsk. Selsk. Skrifter, naturvidsk. og math. Afhandl. 9 Del: om en Egenskab ved de lineære Differentiallign. imell. to Variable). Forresten er der til Theorien af den lineære Differentilalligningss Integration kun föjet den nye Oplysning, at den til Integrationsfaktor har partikulære Integraler af en deraf afledet ligeledes lineær Ligning, hvormed kan sammenholdes hvad ***Trembley*** har lært om de Faktorer der tjene til Integration af mange Differentialligninger af første Orden (mém. de l'acad. roy. de sciences de Turin 1791). Efter Sætningen i 2. stod det heller ikke til at vente, at der skulde være noget synderligt Udbytte for den lineære Differentialligning at vente af Integrationen ved Hjælp af de her omhandlede Faktorer.

Et af ***Euler*** angivet specielt Exempel (instit. calc. integr. vol. II p. 101) er

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + \left(\lambda P - \lambda^2 + \frac{dP}{dx}\right) y = Q,$$

hvor P og Q ere Funktioner af x, λ konstant. Ligning (13) bliver

$$\frac{d^2X}{dx^2} - P\frac{dX}{d} + (\lambda P - \lambda^2)X = 0$$

eller

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \lambda^2 X - P\left(\frac{dX}{dx} - \lambda X\right) = 0,$$

hvortil svarer det partikulære Integral

$$\frac{dX}{dx} - \lambda X = 0$$

altsaa

$$X = e^{\lambda x} = X_1.$$

Det andet partikulære Integral faaes let ved Methoden af den arbitrære Konstants Variation, idet man sætter $X = ce^{\lambda x}$ og gjör c variabel. Derved erholdes

$$X = e^{\lambda x}\int e^{\int (P-2\lambda) dx} dx = e^{\lambda x}\int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx = X_2$$

Man vil nu have

$$\int X_1 P_2 dx = \int e^{\lambda x}\left(\lambda P - \lambda^2 + \tfrac{dP}{dx}\right) dx = e^{\lambda x}(P - \lambda)$$

$$\int X_2 P_2 dx = \int e^{\lambda x}\left(\lambda P - \lambda^2 + \tfrac{dP}{dx}\right) dx \int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx$$

$$= e^{\lambda x}(P - \lambda)\int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx - \int (P - \lambda) e^{\int P dx - \lambda x} dx$$

$$= e^{\lambda x}(P - \lambda)\int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx - e^{\int P dx - \lambda x},$$

hvoraf udledes

$$X_2 \int X_1 P_2 dx - X_1 \int X_2 P_2 dx = e^{\int P dx}.$$

Endvidere findes

$$X_2 \int QX_1 dx - X_1 \int QX_2 dx =$$

$$e^{\lambda x}\int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx \int e^{\lambda x} Q dx - e^{\lambda x}\int e^{\lambda x} Q dx \int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx,$$

som ifølge Formlen

$$uv - \int v du = \int u dv$$

reduceres til

$$e^{\lambda x}\int e^{\int P dx - \lambda x} Q dx.$$

Indsættes disse Udtryk i (21), faaes

$$y = e^{\lambda x - \int P dx}\left(c_1 \int e^{\int P dx - 2\lambda x} dx - c_2 + \int e^{\int P dx - \lambda x} Q dx\right)$$

stemmende med Eulers ad anden Vej fundne Resultat.

4. Vigtigere Udbytte giver Methodens Anvendelse paa den med Hensyn til y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ *homogene Differentialligning af Formen* (2), selv om den ikke tilfredsstiller nogen af Betingelserne (4).

Af hvad Grad end Ligningens Homogeneitet er, kan den altid ved Division med P og en passende Potens af y bringes paa Formen

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Ry\frac{dy}{dx}+Sy^2=0.$$

Men derhos maa her nødvendig Q være konstant, da Ligningen ellers ikke kunde være fremgaaet af en Differentialligning af første Orden oprindelig begyndende med $Py^a\frac{dy}{dx}$. Sættes derfor $Q=a$, bliver den forelagte

$$y\frac{d^2y}{d^2}+a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+Ry\frac{dy}{dx}+Sy^2=0, \tag{22}$$

og dens Faktor

$$\varphi=Xy^{a-1}, \tag{23}$$

hvorefter Ligningen i X bliver

$$\frac{d^2X}{dx^2}-R\frac{dX}{dx}+\left((a+1)S-\frac{dR}{dx}\right)X=0. \tag{24}$$

Ifølge 3. vil nu Integrationen af (24) og dermed af (22) afhænge af, om man kan finde partikulære Integraler til

$$\frac{d^2X'}{dx^2}+R\frac{dX'}{dx}+(a+1)SX'=0. \tag{25}$$

5. Der frembyder sig nu umiddelbart *to simple Tilfælde*, næmlig

$$S=0 \text{ og } a+1=0,$$

der begge ændre (24) til

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{d\,.\,RX}{dx}, \tag{26}$$

som har de partikulære Integraler

$$X_1=e^{\int Rdx},\ X_2=e^{\int Rdx}\int e^{-\int Rdx}dx. \tag{27}$$

De to tilsvarende Faktorer ere

$$\varphi_1=y^{a-1}e^{\int Rdx},\ \varphi_2=y^{a-1}e^{\int Rdx}\int e^{-\int Rdx}dx. \tag{28}$$

Betragtes først Tilfældet $S=0$, saa ville disse Faktorer frembringe Ligningerne

$$\left.\begin{array}{l} y^a e^{\int R dx} \dfrac{d^2y}{dx^2} + a y^{a-1} e^{\int R dx} \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + R y^a e^{\int R dx} \dfrac{dy}{dx} = 0, \\ y^a e^{\int R dx} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx \,.\, \dfrac{d^2y}{dx^2} + a y^{a-1} e^{\int R dx} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx \,.\, \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \\ \qquad + R y^a e^{\int R dx} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx \,.\, \dfrac{dy}{dx} = 0, \end{array}\right\} \quad (29)$$

af hvilke den første tilfredsstiller (6), idet $\psi'(y) = 0$, medens den anden kræver $\psi'(y) = -y^a$. Man vil følgelig komme til de to Differentialligninger af første Orden

$$\left.\begin{array}{l} y^a e^{\int R dx} \dfrac{dy}{dx} = c_1 \\ y^a e^{\int R dx} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx \,.\, \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y^{a+1}}{a+1} = c_2, \end{array}\right\} \quad (30)$$

og Elimination af $\dfrac{dy}{dx}$ giver den til (22) for $S = 0$ svarende fuldstændige primitive Ligning

$$c_1 \int e^{-\int R dx} dx - \frac{y^{a+1}}{a+1} = c_2. \quad (31)$$

I Tilfældet $a + 1 = 0$ ændres (22) til

$$y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ry \frac{dy}{dx} + Sy^2 = 0, \quad (32)$$

som ved Indførelse af Faktorerne (28), idet $a = -1$, giver

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{\int R dx}}{y} \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{e^{\int R dx}}{y^2} \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + R \dfrac{e^{\int R dx}}{y} \dfrac{dy}{dx} + S e^{\int R dx} = 0, \\ \dfrac{e^{\int R dx}}{y} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx \,.\, \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{e^{\int R dx}}{y^2} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx \,.\, \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 \\ + R \dfrac{e^{\int R dx}}{y} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx . \dfrac{dy}{dx} + S e^{\int R dx} \displaystyle\int e^{-\int R dx} dx = 0. \end{array}\right\} \quad (33)$$

Den første af disse kræver $\psi'(y) = 0$, den anden $\psi'(y) = -\dfrac{1}{y}$, følgelig blive de to første Integraler

$$\left.\begin{aligned}\frac{e^{\int Rdx}}{y}\frac{dy}{dx}+\int Se^{\int Rdx}dx &= c_1\\ \frac{e^{\int Rdx}}{y}\int e^{-\int Rdx}dx\,.\,\frac{dy}{dx}+\int Se^{\int Rdx}\,dx\int e^{-\int Rdx}dx - l\,.\,y &= c_2\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

og den primitive Ligning

$$c_1\int e^{-\int Rdx}dx - \int Se^{\int Rdx}dx\,.\int e^{-\int Rdx}dx + \int Se^{\int Rdx}dx\int e^{-\int Rdx}dx - l\,.\,y = c_2,$$

hvori dog de to Led paa venstre Side kunne sammendrages, saa at man faaer

$$c_1\int e^{-\int Rdx}dx - \int e^{-\int Rdx}dx\int Se^{\int Rdx}dx - l\,.\,y = c_2 \qquad (35)$$

Er paa een Gang $S = 0$ og $a + 1 = 0$, kan ikke (31), men (35) bruges.

6. Der gives *endnu en simpel Relation* imellem den forelagte homogene Lignings Koefficienter, som gjør Ligningen (24) i X integrabel, idet næmlig

$$(a + 1)\,S = \frac{dR}{dx} \qquad (36)$$

giver

$$\frac{d^2X}{dx^2} - R\,\frac{dX}{dx} = 0, \qquad (37)$$

hvis partikulære Integraler ere

$$X_1 = 1,\ X_2 = \int e^{\int Rdx}dx, \qquad (38)$$

saa at Faktorerne blive

$$\varphi_1 = y^{a-1},\ \varphi_2 = y^{a-1}\int e^{\int Rdx}dx. \qquad (39)$$

Derved bliver (22), idet tillige $S = \dfrac{1}{a+1}\dfrac{dR}{dx}$ indsættes, til

$$\left.\begin{aligned} y^a\frac{d^2y}{dx^2} + ay^{a-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ry^a\frac{dy}{dx} + \frac{1}{a+1}\frac{dR}{dx}\,y^{a+1} = 0,\\ y^a\int e^{\int Rdx}dx\,.\,\frac{d^2y}{dx^2} + ay^{a-1}\int e^{\int Rdx}dx\,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Ry^a\int e^{\int Rdx}dx\,.\,\frac{dy}{dx}\\ + \frac{1}{a+1}\frac{dR}{dx}y^{a+1}\int e^{\int Rdx}dx = 0,\end{aligned}\right\}\quad(40)$$

som begge give $\psi'(y) = 0$, saa at de tilsvarende Differentialligninger af første Orden blive

$$\left.\begin{aligned} y^a \frac{dy}{dx} + R\frac{y^{a+1}}{a+1} &= c_1 \\ y^a \int e^{\int Rdx}dx \,.\, \frac{dy}{dx} + \frac{y^{a+1}}{a+1}\left(R\int e^{\int Rdx}dx - e^{\int Rdx}\right) &= c_2 \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

idet

$$\int dR \int e^{\int Rdx}dx = R\int e^{\int Rdx}dx - e^{\int Rdx}.$$

Af (41) erholdes efter tilbørlig Reduktion følgende primitive Ligning

$$c_1 \int e^{\int Rdx}dx - \frac{y^{a+1}}{a+1}\, e^{\int Rdx} = c_2. \quad (42)$$

7. Som Exempler paa de nævnte Tilfælde anføres følgende:

$$\text{A.}\quad ay\frac{d^2y}{dx^2} + b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\frac{dy}{dx} = 0,$$

behandlet af ***Lacroix*** (traité du calc. diff. & int. t. II. art. 601. Paris 1814 p. 311) ved en anden Methode. Ifølge (31) faaes umiddelbart, idet

$$\int \frac{dx}{a\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{a}\, l\,.\left(x + \sqrt{1+x^2}\right),$$

$$c_1 \int \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{a}} dx - \frac{ay^{\frac{b}{a}+1}}{a+b} = c_2$$

hvoraf endelig udledes

$$ac_1 \left[\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{a}+1}}{1+a} + \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{a}-1}}{1-a}\right] - \frac{ay^{\frac{b}{a}+1}}{a+b} = c_2.$$

$$\text{B.}\quad y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x^2} = 0$$

integreres efter (35), idet $\int Rdx = 2\, l.x$, $S = \frac{1}{x^2}$, saaledes

$$-\frac{c_1}{x} - l\,.\,x - l\,.\,y = c_2$$

eller ved Forandring af Konstanternes Fortegn

$$y = \frac{c_2 e^{\frac{c_1}{x}}}{x}.$$

$$\text{C.}\quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ytgx\frac{dy}{dx} + \frac{2}{3}\frac{y^2}{\cos^2 x} = 0$$

tilfredsstiller (36), saa at man ifølge (42) erholder, idet $\int Rdx = \int tgxdx = - l \,.\, \cos x$,

$$c_1 \int \frac{dx}{\cos x} - \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\cos x} = c_2$$

eller med Forandring af Konstanternes Fortegn

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cos x \left(c_1 l \,.\, tg\left(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}x\right) + c_2 \right).$$

8. Da Integrationen af den homogene Differentialligning (22) støtter sig paa Bestemmelsen af partikulære Integraler af Ligningen (24) eller (25), saa ville *de vel bekjendte Tilfælde, hvori den lineære Ligning er integrabel, føre til nogle tilsvarende ved den homogene.* Disse indtræde, naar man har

$$R = \frac{b}{A + Bx}, \quad S = \frac{c}{(A + Bx)^2},$$

hvorunder mere specielt indbefattes Tilfældet

$$R = b, \quad S = c.$$

I det sidste vil (22) have en Integrationsfaktor, som er det partikulære Integral af (24), altsaa af Formen

$$X = e^{mx},$$

idet m er en Rod i Ligningen

$$m^2 - bm + (a + 1)\, c = 0. \tag{43}$$

Faktoren

$$\varphi = e^{mx} y^{a-1}$$

ændrer (22) til

$$e^{mx} y^a \frac{d^2y}{dx^2} + a e^{mx} y^{a-1} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + b e^{mx} y^a \frac{dy}{dx} + c e^{mx} y^{a+1} = 0,$$

hvortil svarer de to første Integraler

$$\left.\begin{aligned} e^{m_1 x} y^a \frac{dy}{dx} + \frac{c}{m_1} e^{m_1 x} y^{a+1} &= C_1, \\ e^{m_2 x} y^a \frac{dy}{dx} + \frac{c}{m_2} e^{m_2 x} y^{a+1} &= C_2, \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

idet m_1 og m_2 ere de to Rødder i (43). Elimination af $\frac{dy}{dx}$ giver en primitiv Ligning, som ved forandret Betegnelse af Konstanterne reduceres til den simple Form

$$y^{a+1} = C_1 e^{-m_1 x} + C_2 e^{-m_2 x}. \tag{45}$$

Det vil imidlertid let ses, at hvis $m_1 = m_2$, saa falde de to Ligninger (44) sammen og kunne ikke tjene til Dannelsen af (45). Men til samme Tid ere de to partikulære Integraler af (24)

$$X = e^{mx}, \quad X = xe^{mx},$$

idet $m = \frac{b}{2}$, $b^2 = 4(a+1)c$, da (43) har lige Rødder. Den til det sidste partikulære Integral svarende Faktor

$$\varphi = xe^{mx}y^{a-1}$$

bringer (22) til at tilfredsstille (4), af hvilke den anden reducerer sig til

$$x(m^2 - bm + (a+1)c) + m - \frac{c(a+1)}{m} = 0,$$

stemmende med (43) og $m^2 = \frac{b^2}{4} = (a+1)c$. *Det* første Integral, hvortil man ifølge denne Faktor kommer, vil være

$$xe^{mx}y^a \frac{dy}{dx} + \frac{c}{m^2} y^{a+1} e^{mx}(mx - 1) = C_2, \tag{46}$$

som kombineret med det første Integral, hvortil de to (44) smelte sammen, giver en primitiv Ligning af Formen

$$y^{a+1} = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{1}{2}bx}, \tag{47}$$

hvor der for m er sat dens Værdi $\frac{1}{2}b$.

Hvis $b^2 < 4(a+1)c$, er vel (45) brugelig, men den imaginære Form deraf ombyttes helst med den reelle

$$y^{a+1} = \left(C_1 \sin\left(\tfrac{x}{2}\sqrt{4(a+1)c - b^2}\right) + C_2 \cos\left(\tfrac{x}{2}\sqrt{4(a+1)c - b^2}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}bx}.$$

Beholder man den mere almindelige Form for Koefficienterne R og S, vil Ligningen i X findes at være

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{b}{A+Bx}\frac{dX}{dx} + \frac{(a+1)c + Bb}{(A+Bx)^2} X = 0.$$

Et partikulært Integral heraf er

$$X = (A + Bx)^m,$$

idet m er Rod i

$$m(m-1)B^2 - bBm + (a+1)c + bB = 0. \tag{49}$$

Ved Hjælp af Faktoren

$$\varphi = (A+Bx)^m y^{a-1}$$

integreres nu (22) ved

$$(A+Bx)^m y^a \frac{dy}{dx} + \frac{c(A+Bx)^{m-1}}{(m-1)B} y^{a+1} = C. \tag{50}$$

Til de to Værdier af m svare to første Integraler af Formen (50) og ved Elimination af $\frac{dy}{dx}$ erholdes den primitive Ligning

$$y^{a+1} = C_1(A+Bx)^{-(m_1-1)} + C_2(A+Bx)^{-(m_2-1)}. \qquad (51)$$

Forsaavidt nogen af Rødderne i (49) bliver lig 1 maatte det sidste Led i (50) forandres til $cy^{a+1}l.(A+Bx)$, men dette Tilfælde kan her ganske forbigaaes, da det vil kræve $(a+1)c = 0$, altsaa enten $a = -1$ eller $c = 0$, hvilke Tilfælde ere behandlede i 6.

Fremdeles bliver atter her at tage Hensyn til Tilfældet af lige Rødder i (49), hvorved de to partikulære Integraler af (48) blive

$$X = (A+Bx)^m,\ X = (A+Bx)^m l.(A+Bx).$$

Heraf erholdes de to Faktorer ved Multiplikation med y^{a-1}, og til den første af disse vil der svare et første Integral af Formen (50), medens Indførelsen af den anden vil give den forelagte Form (2), tilfredsstillende Betingelserne (4), af hvilke den sidste bliver

$$l.(A+Bx)\big(m(m-1)B^2-(m-1)Bb+(a+1)c\big)+(m-1)B-\frac{(a+1)c}{m-1}=0,$$

som er rigtig ifølge (49) og fordi der til lige Rødder i denne kræves

$$m = \frac{b+B}{2B},\ (m-1)^2 = \left(\frac{b-B}{2B}\right)^2 = \frac{(a+1)c}{B^2}.$$

Det deraf opstaaende første Integral bliver

$$(A+Bx)^m y^a\, l.(A+Bx).\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{cy^{a+1}(A+Bx)^{m-1}}{(m-1)B}\left(l.(A+Bx)-\frac{1}{m-1}\right) = C_2. \qquad (52)$$

Af (50) og (52) udledes da med lidt forandret Betegnelse

$$y^{a+1} = \big(C_1 + C_2 l.(A+Bx)\big)(A+Bx)^{-(m-1)}. \qquad (53)$$

Hvis endelig (49) har imaginære Rødder, kan (51) ændres til reel Form.

Hvorledes de her fundne Resultater kunne generaliseres, forbeholdes til Gjenstand for en anden Meddelelse.

9. Det kan undertiden hændes, at *en Ligning af Formen (2) kun opfylder een af Betingelserne (4)* (Exempel derpaa er anført i 3.), saa at den vel ikke er et exakt Differential af en Ligning af Formen (1), men paa den anden Side giver en lettere Bestemmelse af φ ifølge (6). Hvis saaledes den første (4) er opfyldt, saa faaes af den første (6)

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

altsaa φ uafhængig af y, og følgelig maa den anden (6) give *φ som Funktion af x alene.* Til Bestemmelse af φ erholdes da følgende ændrede Form for (8)

$$P\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(2\frac{dP}{dx} - R\right)\frac{d\varphi}{dx} + \left(\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dy}\right)\varphi = 0. \quad (54)$$

Hvis altsaa den forelagte Ligning har et første Integral af Formen (1), saa maa der af (54) kunne faaes et partikulært Integral, som er Funktion af x alene. Deraf maa dog ingenlunde sluttes, at Koefficienterne i (54) bör indeholde x alene; det er tilstrækkeligt, men ogsaa nødvendigt, at der gives et partikulært Integral ikke indeholdende y. Men idet y saaledes ikke indgaaer i φ, maa denne Størrelse blive upaavirket af de specielle Værdier, man maatte ville tillægge y; det maa følgelig være tilladt at tillægge y en speciel Værdi, der letter Integrationen af (54). Følgende Exempler oplyse dette Tilfælde nærmere.

$$\text{A.} \quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

vil have sin Faktor bestemt ifølge (54) ved

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{x^2}\varphi = 0,$$

hvortil svarer

$$\varphi = x, \quad \varphi = xl\,.\,x.$$

Ved den første Faktors Indførelse ledes man til det første Integral

$$yx\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2 = C_1,$$

og ved den anden, der kræver $\psi(y) = -\frac{1}{2}y^2$, kommer man til

$$yxl\,.\,x\,.\,\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2(l\,.\,x - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}y^2 = C_2.$$

Den primitive Ligning bliver følgelig

$$\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 = C_1 l\,.\,x + C_2.$$

$$\text{B.}\quad y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{xl\,.\,x}\right)\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

giver følgende Ligning i φ

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1 + l\,.\,x}{xl\,.\,x}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1 + l\,.\,x + l^2\,.\,x}{x^2l^2\,.\,x}\varphi = 0.$$

Det ligger nær ved Forsøg at erholde det partikulære Integral

$$\varphi = xl\,.\,x$$

og dernæst ved Methoden af den arbitrære Konstants Variation at finde det andet, som bliver

$$\varphi = xl\,.\,x\,.\,l\,.\,l\,.\,x.$$

Disse give henholdsvis

$$yxl\,.\,x\,.\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}x^2(l\,.\,x - \tfrac{1}{2}) = C_1,$$

$$yxl\,.\,x\,.\,l\,.\,l\,.\,x\,.\frac{dy}{dx} + \int xl\,.\,x\,.\,l\,.\,l\,.\,x\,.\,dx - \tfrac{1}{2}y^2 = C_2,$$

følgelig den primitive Ligning

$$\tfrac{1}{2}x^2l\,.\,x\,.\,l\,.\,l\,.\,x - \tfrac{1}{4}x^2l\,.\,l\,.\,x - \int xl\,.\,x\,.\,l\,.\,l\,.\,xdx + \tfrac{1}{2}y^2 = C_1l\,.\,l\,.\,x - C_2.$$

$$\text{C.}\quad x^4\frac{d^2y}{dx^2} - (x^3 + 2xy)\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0$$

er et fra ***Lacroix*** (tr. du calc. t. II. art. 600) laant Exempel, der giver til Bestemmelse af φ

$$x^4\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (9x^3 + 2xy)\frac{d\varphi}{dx} + (15x^2 + 10y)\varphi = 0.$$

Heraf skal kunne faaes et af y uafhængigt partikulært Integral, og da $y = \infty$ giver

$$2x\frac{d\varphi}{dx} + 10\varphi = 0,$$

altsaa

$$\varphi = \frac{1}{x^5},$$

som virkelig tilfredsstiller den første Ligning i φ og kan bruges som Integrationsfaktor i den forelagte, saa erholder man derved

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x^4} = C.$$

Denne Ligning kan gjöres homogen ved at sætte $y = z^2$ eller gjöres umiddelbart integrabel ved Separation af de Variable, naar man sætter $y = x^2 z$. Ad begge Veje kommer man til den primitive Ligning, der af *Lacroix* er naaet ved en mere sammensat Methode. Naar man ikke her kan finde mere end een Integrationsfaktor, saa er det fordi den ikke har noget andet første Integral af Formen (1) end det fundne.

Foruden det her behandlede Tilfælde, i hvilket φ er Funktion af x alene, gives der intet andet, som tilsteder nogen Integrationsfaktor af den Art. Thi gaaer man ud fra

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

saa giver denne Ligning og den første (6)

$$Q = \frac{dP}{dy},$$

hvilket netop er det betragtede Tilfælde.

10. Til Fuldstændiggjörelse af den i 9 begyndte Undersøgelse, skal nu betragtes det Tilfælde, hvor *den forelagte Ligning tilfredsstiller den anden af Betingelserne* (4). Denne omformes til

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d^2P}{dx^2} + \frac{dS}{dy}, \tag{55}$$

saa at de til Bestemmelse af φ tjenende Ligninger, navnlig den første (6) og (9), blive

$$\left.\begin{aligned} \varphi Q &= \frac{d \,.\, \varphi P}{dy}, \\ P\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(2\frac{dP}{dx} - R\right)\frac{d\varphi}{dx} + \frac{S}{P}\left(Q - \frac{dP}{dy}\right)\varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Den tidligere fundne Ligning

$$\varphi = \frac{X}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dy},$$

udledt af den første, vedbliver fremdeles at gjælde og den anden tjener bestandig til Bestemmelse af X.

Saaledes til Exemplet

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^2}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

faaes let Faktoren

$$\varphi = Xy,$$

idet for Kortheds Skyld er sat X for $\frac{X}{x^2}$. X vil afhænge af

$$x^2 \frac{d^2X}{dx^2} + x\frac{dX}{dx} + X = 0,$$

der har de to partikulære Integraler

$$X = \cos(l\,.\,x), \quad X = \sin(l\,.\,x),$$

som begge kunne bruges og giver

$$yx^2 \cos(l\,.\,x)\,.\,\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}y^2x\left(\sin(l\,.\,x) + \cos(l\,.\,x)\right) = C_1,$$

$$yx^2 \sin(l\,.\,x)\,.\,\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}y^2x\left(\sin(l\,.\,x) - \cos(l\,.\,x)\right) = C_2,$$

hvoraf atter faaes den primitive Ligning

$$\tfrac{1}{2}y^2x = C_1 \sin(l\,.\,x) - C_2 \cos(l\,.\,x).$$

11. Efter de i 9. anstillede Undersøgelser er der fremdeles Anledning til at henvende Opmærksomheden paa *Faktorer, som mulig kunne afhænge af y alene.* Man gaaer altsaa ud fra

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

hvorved til Bestemmelse af φ haves den første (6) og den reducerede (8), nemlig

$$\left.\begin{aligned} P\frac{d\varphi}{dy} + \left(\frac{dP}{dy} - Q\right)\varphi &= 0, \\ S\frac{d\varphi}{dy} + \left(\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dy}\right)\varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Til Bestemmelse af φ ved (57) kræves nu, at Betingelsen

$$\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dy} - Q\right) = \frac{1}{S}\left(\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dy}\right), \qquad (58)$$

er opfyldt, og at tilmed disse Udtryk ere afhængige af y alene. Sættes Udtrykkene (58) lig Y, faaes

$$\varphi = e^{-\int Y dy} \qquad (59)$$

(jfr. den første (39)).

Foreligger saaledes

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + (x - xy^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2y^2 + y\right)\frac{dy}{dx} + xy = 0,$$

saa er

$$\frac{1}{P}\left(\frac{dP}{dy} - Q\right) = y = \frac{1}{S}\left(\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dR}{dx} + \frac{dS}{dy}\right),$$

følgelig

$$\varphi = e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

som giver det første Integral

$$e^{-\frac{1}{2}y^2}xy\frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y^2}x^2y = C.$$

12. Til Slutning maa endnu *det specielle Tilfælde omtales, hvor $S = 0$*, hvilket giver de til Bestemmelse af φ fundne Ligninger en simplere Form. Man faaer vel som sædvanlig

$$\varphi = \frac{X}{P}e^{\int\frac{Q}{P}dy}, \tag{7}$$

men tillige bliver den anden (6) til

$$\frac{d\,.\,\varphi P}{dx} - \frac{R}{P}\,.\,P\varphi = -\psi'(y), \tag{60}$$

som ogsaa kan faaes ved Integration af (9), naar der for den arbitrære Funktion af y, som kan indkomme, sættes $-\psi'(y)$. Ved Integration af (60) erholdes dernæst

$$\varphi = -\frac{\psi'(y)}{P}e^{\int\frac{R}{P}dx}\int e^{-\int\frac{R}{P}dx}dx + \frac{Y}{P}e^{\int\frac{R}{P}dx}.$$

Ethvert af Leddene heri er et partikulært Integral af (9) og angiver altsaa en anden Form for den ved (7) bestemte Faktor. For at Bestemmelsen af en saadan Faktor skal blive mulig, maa man altsaa have tilfredsstillet i det mindste een af Ligningerne

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \frac{X}{P}e^{\int\frac{Q}{P}dy} = \frac{Y}{P}e^{\int\frac{R}{P}dx}\\ \varphi &= \frac{X}{P}e^{\int\frac{Q}{P}dy} = -\frac{\psi'y}{P}e^{\int\frac{R}{P}dx}\int e^{-\int\frac{R}{P}dx}dx,\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

idet X og Y eller X og $\psi'(y)$ ere Funktioner, henholdsvis af x alene og y alene, som maae bestemmes ved nærmere Betragtning af det dobbelte Udtryk for φ. Er det ikke muligt at tilfredsstille nogen af Ligningerne (61), har den forelagte Ligning ingen Faktor, som blot indeholder x og y. Kan man blot tilfredsstille den ene, saa har man kun een saadan Faktor og det ene første

Integral er bestemt. Det første Integral, som faaes ved Hjælp af den første Faktor (61), har ifølge den foregaaende Udvikling $\psi'(y) = 0$, $\psi(y) = c$, medens derimod det ved den anden (61) udledede første Integral faaer $\psi(y)$ bestemt som en virkelig Funktion af y. Følgende Exempler oplyse Tilfældet.

$$\text{A.}\quad x\frac{d^2y}{dx^2} + (x + xy)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a\frac{dy}{dx} = 0.$$

Den første (61) giver

$$\varphi = \frac{X}{x}e^{y+\frac{1}{2}y^2} = Yx^{a-1},$$

saa at man faaer

$$X = x^a, \quad Y = e^{y+\frac{1}{2}y^2},$$

følgelig

$$\varphi = x^{a-1}e^{y+\frac{1}{2}y^2}.$$

Derved erholdes det første Integral

$$x^a e^{y+\frac{1}{2}y^2}\frac{dy}{dx} = c_1.$$

Af den anden (61) faaes

$$\varphi = \frac{X}{x}e^{y+\frac{1}{2}y^2} = -\frac{\psi'(y)}{x}e^{\int\frac{a}{x}dx}\int e^{-\int\frac{a}{x}dx}dx$$

eller

$$\frac{X}{x}e^{y+\frac{1}{2}y^2} = \frac{\psi'(y)}{a-1},$$

saa at man maa have

$$X = \frac{x}{a-1}, \quad \psi'(y) = e^{y+\frac{1}{2}y^2},$$

og altsaa

$$\varphi = \frac{e^{y+\frac{1}{2}y^2}}{a-1}.$$

Denne Faktor fører til det første Integral

$$\frac{xe^{y+\frac{1}{2}y^2}}{a-1}\frac{dy}{dx} + \int e^{y+\frac{1}{2}y^2}dy = c_2.$$

Deraf udledes ved Elimination af $\frac{dy}{dx}$ og Forandring i Betegnelsen for Konstanterne

$$x^{a-1}\int e^{y+\frac{1}{2}y^2}\,dy = c_1x^{a-1} + c_2.$$

Hvis $a = 1$, gjælder ikke det sidst fundne af de to første

Integraler, lige saa lidt som den dertil svarende Faktor. Derimod faaes uden Vanskelighed

$$X = xl.x,\quad \psi'(y) = -e^{y+\frac{1}{2}y^2},\quad \varphi = l.x.e^{y+\frac{1}{2}y^2},$$

hvorved udledes det første Integral

$$xl.x.e^{y+\frac{1}{2}y^2}.\frac{dy}{dx} - \int e^{y+\frac{1}{2}y^2}dy = c_2$$

og den primitive Ligning

$$\int e^{y+\frac{1}{2}y^2}\,dy = c_1 l.x + c_2.$$

B. $$\frac{d^2y}{dx^2} + (y+\tfrac{1}{2}x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x+\tfrac{1}{2}y)\frac{dy}{dx} = 0$$

tilsteder kun Brugen af den første (61), som giver

$$\varphi = Xe^{\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}xy} = Ye^{\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}x^2} = e^{\frac{1}{2}(x^2+xy+y^2)}$$

og derved frembringer det første Integral

$$e^{\frac{1}{2}(x^2+xy+y^2)}\frac{dy}{dx} = C.$$

C. $$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_1(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

er et mere almindeligt Exempel (findes ogsaa i Liouville journ. des math. t. VII p. 134, hvor det er behandlet ved Methoden af den arbitrære Konstants Variation, efterat den Ligning, hvori et af de to sidste Led mangler, først er integreret). Det danner en almindelig Klasse af Ligninger, de hvor

$$\frac{Q}{P}\text{ alene indeholder } y,\quad \frac{Q}{P} = f(y),$$

$$\text{og } \frac{R}{P}\text{ alene indeholder } x,\quad \frac{R}{P} = f_1(x).$$

(61) giver da, idet $P = 1$,

$$X = e^{\int f_1(x)dx},\quad Y = e^{\int f(y)dy},\quad \varphi = e^{\int f_1(x)dx+\int f(y)dy}$$

$$X = e^{\int f_1(x)dx}\int e^{-\int f_1(x)dx}dx,\quad \psi'(y) = -e^{\int f(y)dy},$$

$$\varphi = e^{\int f_1(x)dz+\int f(y)dy}\int e^{-\int f_1(x)dx}dx,$$

saa at de to første Integraler blive

$$e^{\int f_1(x)dx+\int f(y)dy}\frac{dy}{dx} = c_1,$$

$$e^{\int f_1(x)dx+\int f(y)dy}\int e^{-\int f_1(x)dx}dx.\frac{dy}{dx} - \int e^{\int f(y)dy}dy = c_2.$$

Den primitive Ligning bliver derefter

$$\int e^{\int f(y)dy} = c_1\int e^{-\int f_1(x)dx} - c_2.$$